En Sætning om den Eulerske Faktor svarende til Differentialligningen

$$M + N\frac{dy}{dx} = 0,$$

hvor M og N ere algebraiske Funktioner af x og y.

Af

cand. mag. **P. C. V. Hansen.**

Vidensk. Selsk. Skr. 5 Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. 10 B. VI.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Bogtrykkeri.

1873.

Liouville har i Journ. de l'école polyt. cah. 22 & 23 og i Journ. des math. tome II og IV meddelt en Række Undersøgelser angaaende Integration af explicite Differentialer og Differentialligninger, idet han som Grundlag har benyttet den af ham selv angivne Theori om Funktionernes Inddeling. Skønt denne Theori er overordenlig simpel, er det dog lykkedes ved dens Hjælp at bevise et ikke ringe Antal Sætninger, af hvilke nogle vel tidligere vare bekjendte, medens andre derimod ere nye.

Det er de af Liouville anvendte Methoder, som nedenfor ere benyttede til at finde de simpleste Former for de Funktioner, som tilfredsstille den partielle Differentialligning, der definerer den Eulerske Faktor svarende til visse totale Differentialligninger mellem 2 Variable, og af første Orden.

Her anføres de af hans Sætninger og Betegnelser, som i det Følgende ville blive benyttede.

Man kalder y *en algebraisk Funktion af* x, hvis y er Rod i en algebraisk Ligning af Formen

$$U = y^\mu + q_1\, y^{\mu-1} + q_2\, y^{\mu-2} + \ldots .\, q_{\mu-1}\, y + q_\mu = 0, \tag{1}$$

hvor $q_1, q_2, q_3 \ldots . q_\mu$ ere rationale Funktioner af x.

Dersom Ligningen kan opløses med Hensyn til y, kan y fremstilles som en *explicit* algebraisk Funktion af x; er dette ikke Tilfældet, er y given *implicite* som Funktion af x.

Det vil altid være tilladt at antage om (1), at den er *irreduktibel*, d. v. s., at det samme y ikke kan være Rod i nogen anden Ligning af lavere Grad med rationale Koefficienter i x.

Hvis (1) er irreduktibel, vil en Ligning som

$$q'_0\, y^{\mu-1} + q'_1\, y^{\mu-2} + \ldots\, q'_{\mu-2}\, y + q'_{\mu-1} = 0,$$

hvor $q'_0, q'_1 \ldots$ ere rationale Funktioner af x, kun kunne existere, hvis den er identisk, d. v. s., hvis

$$q'_0 = 0, \quad q'_1 = 0, \ldots \quad q'_{\mu-1} = 0.$$

Dersom den ved den irreduktible Ligning (1) *bestemte Funktion* y *ogsaa er Rod i en anden algebraisk Ligning*

$$f(y) = 0,$$

som enten er af samme Grad eller af højere Grad end (1) *og ligeledes har rationale Koefficienter* i x, *saa maa alle de andre Rødder i* (1) *ogsaa tilfredsstille Ligningen*

$$f(y) = 0.$$

Man kan let overbevise sig om, at hvad der her er sagt under Forudsætning af, at y kun er Funktion af én uafhængig Variabel, gjælder ganske almindeligt ogsaa uden denne Indskrænkning.

Transcendent kaldes enhver Funktion, som ikke er algebraisk. Logarithmiske Funktioner og Exponentialfunktioner ere saadanne Transcendenter.

De transcendente Funktioner kunne ligesom de algebraiske være givne enten *explicite* eller *implicite.* I det Følgende tages kun Hensyn til de explicite givne Transcendenter. Disse deles i Transcendenterne af 1ste, 2den, 3die, . . . $n$te Orden; en explicite given transscendent Funktion er af 1ste Orden, hvis dens Udtryk kan skrives ved en Kombination af algebraiske Funktioner med saadanne Transcendenter, som have algebraiske Funktioner til uafhængige Variable. Skal en explicite given Transcendent være af 2den Orden, maa den indeholde transcendente Funktioner af Transcendenter af første Orden, og den kan desuden indeholde baade algebr. Funktioner og Transcendenter af 1ste Orden. I Almindelighed vil en explicite given Transcendent være af $n$te Orden, hvis der i dens Udtryk indgaar transcendente Funktioner af Transcendenter af Ordenen n—1.

En Transcendent kaldes *monom*, hvis den kun bestaar af et enkelt Led. Saaledes er

$$l(1 + e^{\sqrt{x}} + l(1 + x))$$

en monom Logarithme af 2den Orden.

Lad

$$U = f(\theta, \eta, \ldots \zeta)$$

være en Transcendent af $n$te Orden, idet f er en algebraisk Funktion af de monome Transcendenter θ, η, . . . ζ af $n$te Orden. Funktionen f kan desuden indeholde baade algebraiske Funktioner og Transcendenter af lavere Ordner. Dersom Antallet af Transcendenter af $n$te Orden er reduceret saa meget som muligt, maa enhver Ligning mellem dem være identisk med Hensyn til de nævnte Størrelser. Dersom derfor en eller anden Regning har ført til en Ligning mellem de nævnte Funktioner, saaledes at der i Ligningen ikke forekommer andre Transcendenter af $n$te eller højere Orden, maa θ, η, . . . ζ kunne erstattes ved vilkaarlige Bogstaver.

1.

I Differentialligningen

$$M + N\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1}$$

antages M og N at være hele rationale Funktioner af x og y. Den til Ligningen hørende Eulerske Faktor φ skal som bekjendt tilfredsstille følgende Differentialligning:

$$M\frac{d\varphi}{dy} - N\frac{d\varphi}{dx} + \varphi\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = 0. \tag{2}$$

Det skal først undersøges, af hvad Beskaffenhed φ maa være, hvis den er en algebraisk Funktion af x og y. I saa Tilfælde skal den være Rod i en algebraisk Ligning af Formen:

$$\Phi = \varphi^m + q_1\,\varphi^{m-1} + q_2\,\varphi^{m-2} + \ldots\ldots q_{m-1}\,\varphi + q_m = 0, \tag{3}$$

hvis Koefficienter ere rationale Funktioner af x og y. Det er altid tilladt at antage om denne Ligning, at den er irreduktibel. Differentiation af (3) giver:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\Phi}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx} = 0, \\ \frac{d\Phi}{dy} + \frac{d\Phi}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dy} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Man eliminerer nu $\frac{d\varphi}{dx}$ og $\frac{d\varphi}{dy}$ mellem (2) og (4). Derved udkommer der en ny algebraisk Ligning i φ med rationale Koefficienter; vi betegne den nye Ligning ved

$$\Phi_1 = 0. \tag{5}$$

Den Rod i (3), som tilfredsstiller (2), maa gjøre (5) identisk. Da saaledes (3) og (5) have én Rod fælles, maa, eftersom (3) er irreduktibel, ogsaa alle andre Rødder i (3) tilfredsstille (5), *og altsaa maa samtlige Rødder i (3) være partikulære Integraler i (2).*

Betegnes en hvilkensomhelst af disse Rødder ved φ_r, skal man altsaa have:

$$M\frac{d\varphi_r}{dy} - N\frac{d\varphi_r}{dx} + \varphi_r\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = 0.$$

Denne Ligning multipliceres med $\mu \varphi_r^{\mu-1}$, hvor μ er et positivt helt Tal. Derved erholdes:

$$M \frac{d\varphi_r^\mu}{dy} - N \frac{d\varphi_r^\mu}{dx} + \mu \varphi_r^\mu \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = 0. \tag{6}$$

Betegnes nu ved

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots \varphi_{r-1}, \varphi_{r+1}, \ldots\ldots \varphi_m$$

de andre Rødder i (3), saa kan man af (6) let udlede:

$$M \frac{dS_\mu}{dy} - N \frac{dS_\mu}{dx} + \mu S_\mu \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = 0, \tag{7}$$

hvor

$$S_\mu = \sum_{r=1}^{r=m} \varphi_r^\mu.$$

Man ser altsaa, at S_μ og φ_r^μ tilfredsstille den samme Differentialligning. S_μ er er en rational Funktion af x og y, og dersom Ligningen (3) overhovedet existerer, maa der altid være mindst én Værdi af S_μ, som er forskjellig fra Nul, idet man lader μ gjennemløbe de positive hele Værdier fra 1 til m. Kan man altsaa for μ og S_μ finde Værdier af den ovennævnte Beskaffenhed, som tilfredsstille (7), saa kan man som Integrationsfaktor tage

$$\varphi = \sqrt[\mu]{S_\mu}. \tag{8}$$

Den praktiske Udførelse af Beregningerne kan undertiden lettes ved følgende Betragtning. Det vil kunne indtræffe, at den rationale Funktion S_μ er en Potens (med pos. eller neg. hel Exponent) af en anden rational Funktion k. Lad os derfor sætte:

$$S_\mu = k^n, \quad \frac{\mu}{n} = r.$$

Da bliver (7) til:

$$M \frac{dk}{dy} - N \frac{dk}{dx} + rk\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = 0, \tag{9}$$

og af (8) faar man:

$$\varphi = \sqrt[r]{k},$$

i hvilke Ligninger altsaa k er rational, r positiv eller negativ, hel eller brudden. Dersom (9) kan tilfredsstilles derved, at man for k indsætter en hel Funktion, faar man φ bestemt som en Rod af en Brøk med 1 til Tæller, hvis r er negativ, og som en Rod af en hel Funktion, hvis r er posisiv.

Dette kommer f. Ex. til Anvendelse, naar man søger Integrationsfaktoren til Ligningen:

$$a^2 + xy + y^2 - (a^2 + xy + x^2) \frac{dy}{dx} = 0.$$

(Tidsskr. for Math., 2den Række, 2den Aargang, Side 18).

Man har her:

$$M = a^2 + xy + y^2, \quad N = -(a^2 + xy + x^2).$$

Man søger (9) tilfredsstillet ved et helt k og sætter derfor:

$$\begin{aligned} k = & \\ & a_0 \\ & + a_1 x + b_1 y \\ & + a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2 \\ & + a_3 x^3 + b_3 x^2 y + c_3 x y^2 + e_3 y^3 + \ldots \text{ osv.} \end{aligned}$$

Koefficienterne maa da tilfredsstille følgende Betingelser:

$$a_1 + b_1 = 0. \quad \text{(I)}$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 b_2 + 2a^2 a_2 + 3r a_0 = 0, \\ a^2 b_2 + 2a^2 c_2 + 3r a_0 = 0. \end{aligned}\right\} \text{(II)}$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 b_3 + 3a^2 a_3 + a_1 (1 + 3r) = 0, \\ 2a^2 c_3 + 2a^2 b_3 = 0, \\ a^2 c_3 + 3a^2 e_3 + b_1 (1 + 3r) = 0. \end{aligned}\right\} \text{(III)}$$

Betingelsen (I) hidrører fra det konstante Led i (9), Betingelserne (II) fra Leddene af første Grad, Betingelserne (III) fra Leddene af 2den Grad. Alle de øvrige Betingelsesligninger ere opfyldte ved at sætte lig Nul Koefficienterne til Leddene af 2den og højere Grad i k. Under denne Forudsætning faar man af de ovenstaaende Ligninger

$$r = -\frac{1}{3}, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = -b_1,$$

saa at Integrationsfaktoren er:

$$\varphi = \frac{1}{(x-y)^3}.$$

Hvis man medtager de Betingelser, som hidrøre fra Led af 3die og 4de Orden i (9), og tilfredsstiller de øvrige ved at antage k for at være af 3die Grad, faar man:

$$\left.\begin{aligned} a^2 b_4 + 4a^2 a_4 + 2a_2 + 3r a_2 = 0, \\ 2a^2 c_4 + 3a^2 b_4 + 2b_2 + 2a_2 + 3r a_2 + 3r b_2 = 0, \\ 3a^2 e_4 + 2a^2 c_4 + 2b_2 + 2c_2 + 3r b_2 + 3r c_2 = 0, \\ 4a^2 f_4 + a^2 e_4 + 2c_2 + 3r c_2 = 0. \end{aligned}\right\} \text{(IV)}$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 b_5 + 5a^2 a_5 + 3(r+1) a_3 = 0, \\ 2a^2 c_5 + 4a^2 b_5 + 3(r+1)(b_3 + a_3) = 0, \\ 3a^2 e_5 + 3a^2 c_5 + 3(r+1)(b_3 + c_3) = 0, \\ 4a^2 f_5 + 2a^2 e_5 + 3(r+1)(c_3 + e_3) = 0, \\ 5a^2 g_5 + a^2 f_5 + 3(r+1) e_3 = 0. \end{aligned}\right\} \text{(V)}$$

Da k antages at være af 3die Grad, reduceres Systemet (V) til

$$r = -1.$$

Af (IV) faar man

$$a_2 = b_2 = c_2 = 0.$$

Systemerne (I), (II), (III) give:

$$a_0 = 0, \quad b_1 = -a_1, \quad b_3 = -3a_3 + \frac{2a_1}{a^2}, \quad c_3 = 3a_3 - \frac{2a_1}{a^2}, \quad e_3 = -a_3.$$

a_1 og a_3 blive arbitrære. Altsaa har man et System af Integrationsfaktorer bestemte ved

$$\varphi = \frac{1}{a_1(x-y) + a_3(x-y)^3 + \frac{2a_1}{a^2}xy(x-y)}.$$

For $a_1 = 0$ faar man én Faktor bestemt ved:

$$\varphi_1 = \frac{1}{(x-y)^3}.$$

For $a_3 = 0$ finder man en anden Faktor:

$$\varphi_2 = \frac{a^2}{(x-y)(a^2+2xy)}.$$

Den forelagte Differentialligning har derfor det fuldstændige Integral

$$\frac{(x-y)^2}{a^2+2xy} = C.$$

2.

De Tilfælde, hvor k er en brudden Funktion, hvis Tæller ikke er 1, ere som oftest meget vidtløftige at behandle ved de ubekjendte Koefficienters Methode. Dog kan det undertiden lykkes at reducere Bestemmelsen af et saadant k til Bestemmelsen af en hel Funktion.

Det kan bevises, at hvis k har Formen

$$k = \frac{L}{XY},$$

hvor L er en hel Funktion, som kan indeholde baade x og y, medens X og Y, der ligeledes ere hele Funktioner, indeholde den ene x, den anden y alene, saa maa Y have Faktorer fælles med M og X med N. Sætter man:

$$\frac{dX}{dx} = X', \quad \frac{dY}{dy} = Y',$$

faar man

$$\frac{dk}{dy} = \frac{Y\frac{dL}{dy} - LY'}{XY^2}, \quad \frac{dk}{dx} = \frac{X\frac{dL}{dx} - LX'}{X^2 Y}.$$

Indsætter man dette i (9), finder man efter Multiplikation med $X^2 Y$

$$\frac{MX\left(Y\frac{dL}{dy} - LY'\right)}{Y} - N\left(X\frac{dL}{dx} - LX'\right) + rLX\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = 0.$$

Her maa

$$\frac{MX\left(Y\frac{dL}{dy} - LY'\right)}{Y}$$

være en hel Funktion, ligesom Tilfældet er med den øvrige Del af Ligningens venstre Side.

Y tør altid antages ikke at have Faktorer fælles med L; derimod ville Y og Y' have Faktorer fælles, saasnart Ligningen $Y = 0$ har lige Rødder. Indeholder Y en Faktor af Formen $(y-a)^p$, kan Brøken forkortes med $(y-a)^{p-1}$, hvorefter $y-a$ vil være Faktor i Nævneren, og $y-a$ maa da gaa op i M. Indeholder $Y = 0$ ingen ligestore Rødder, maa det hele Polynomium Y gaa op i M. Paa samme Maade kan det vises, at Primfaktorerne i X maa forekomme i N. Hvis derfor M indeholder en Faktor, som er Funktion af y alene, og N en Faktor, som er Funktion af x alene, saa vil der være Anledning til at prøve paa at tilfredsstille Faktorens Differentialligning ved at sætte:

$$k = \frac{L}{XY},$$

hvor L, X, Y, have den her omtalte Beskaffenhed.

Hvis man for at integrere Differentialligningen

$$(y^2-1)(2x^2y + 4y + x) + (x^2+1)(2xy^2 - 4x + y)\frac{dy}{dx} = 0$$

sætter

$$k = \frac{L}{(x^2+1)(y^2-1)},$$

finder man Faktoren

$$\varphi = \frac{1}{(y^2-1)(x^2+1)\sqrt[4]{(y^2-1)(x^2+1)}}.$$

Det fuldstændige Integral bliver

$$\frac{2xy-1}{\sqrt[4]{(x^2+1)(y^2-1)}} = C.$$

Hvis man for at integrere Differentialligningen

$$(2x - y)(y + 1) + x(2y - x + 3)\frac{dy}{dx} = 0$$

sætter

$$k = \frac{L}{x(y+1)},$$

finder man baade Faktoren

$$\frac{(x+y)^2}{x^2(y+1)^2}$$

og Faktoren

$$\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}(y+1)^{\frac{4}{3}}}.$$

Altsaa er det fuldstændige Integral

$$\frac{(x+y)^3}{x(y+1)} = C.$$

3.

Det skal nu undersøges, hvorvidt Integrationsfaktorens Differentialligning

$$M\frac{d\varphi}{dy} - N\frac{d\varphi}{dx} + \varphi\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = 0$$

kan tilfredsstilles ved for φ at indsætte en transcendent Funktion af x og y. Lad

$$\theta = l.u$$

være en logarithmisk Transcendent af n^{te} Orden, saa at u altsaa er transcendent af Ordnen $n-1$. Vi sætte da

$$\varphi = F(x, y, \theta),$$

hvor F er en algebraisk Funktion af x og y, af Transcendenter af lavere Orden end den n^{te}, af θ og muligvis endnu andre Transcendenter af n^{to} Orden, som vi foreløbig intet Hensyn tage til; men hvis Antal antages reduceret til det mindst mulige. Forsaavidt der gives flere Integrationsfaktorer, som kunne udtrykkes ved bekjendte Funktioner af x og y, ville vi antage, at $\varphi = F(x, y, \theta)$ er den, som er den simpleste. Sætter man:

$$\frac{d\varphi}{dx} = F_2, \quad \frac{d\varphi}{dy} = F_1,$$

saa skal man altsaa have:

$$M F_1(x, y, \theta) - N F_2(x, y, \theta) + F(x, y, \theta)\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = 0.$$

Denne Ligning skal være identisk, selv om man for θ indfører $\theta + \mu$, hvor μ er en arbitrær Konstant, saa at man ogsaa skal have:

$$M F_1(x, y, \theta + \mu) - N F_2(x, y, \theta + \mu) + F(x, y, \theta + \mu)\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = 0. \qquad (10)$$

Men den samme Ligning vilde fremkomme ved i (2) at sætte

$$\varphi = F(x, y, \theta + \mu)$$

Hvis altsaa $F(x, y, \theta)$ er en Integrationsfaktor, saa er $F(x, y, \theta + \mu)$ det ogsaa. Ved at differentiere (10) m. H. t. μ og bagefter sætte $\mu = 0$, vil man se, at de partielle Differentialkoefficienter af F m. H. t. θ, som vi her ville betegne ved:

$$F_\theta'(x, y, \theta),\quad F_\theta''(x, y, \theta), \ldots\ldots$$

alle ere Integrationsfaktorer, hvis $F(x, y, \theta)$ er det. Forholdet mellem $F(x, y, \theta)$ og $F_\theta'(x, y, \theta)$ kan ikke være uafhængigt af θ. Betegner man nemlig med A en Funktion af x og y, som ikke indeholder θ og ikke indeholder Transcendenter af højere Orden end den n^{te}, og man sætter:

$$F_\theta'(x, y, \theta) = A\,F(x, y, \theta),$$

saa vil det være tilladt i denne Ligning at erstatte θ ved en vilkaarlig Størrelse i. Altsaa har man:

$$\frac{dF(x, y, i)}{di} = A\,F(x, y, i).$$

Er nu i_0 en speciel Værdi af i, saa følger heraf

$$F(x, y, i) = F(x, y, i_0)\,e^{A(i-i_0)}.$$

Men den ene Side af denne Ligning er m. H. t. i en algebraisk Funktion, den anden en Exponentialfunktion, og Ligningen indeholder altsaa en Urimelighed. Striden kan ikke hæves ved at gjøre A til Nul, thi da blev $F(x, y, \theta)$ uafhængig af θ.

Heller ikke kan man have

$$\frac{F_\theta''(x, y, \theta)}{F_\theta'(x, y, \theta)} = B,$$

hvor B er uafhængig af θ. Thi ogsaa her vilde det være tilladt at erstatte θ ved et vilkaarligt Bogstav i, saa at man fik:

$$\frac{d^2F(x, y, i)}{di^2} - B\frac{dF(x, y, i)}{di} = 0.$$

Men heraf vilde følge:

$$F(x, y, i) = \alpha e^{Bi} + \beta,$$

hvor α og β ere uafhængige af i; men denne Ligning er urimelig. Resultatet gjælder ikke, hvis $B = 0$, i hvilket Tilfælde man faar:

$$F_\theta'(x, y, \theta) = \gamma,$$

hvor γ ikke indeholder θ. Da nu $F_\theta'(x, y, \theta)$ er en Integrationsfaktor ligesaa vel som $F(x, y, \theta)$, saa ser man, at Antagelsen

$$F_\theta''(x, y, \theta) = 0$$

medfører den Konsekvens, at der maa være Faktorer, som indeholde et ringere Antal Transcendenter end $F(x, y, \theta)$, hvilket strider mod den Antagelse, vi her ere gaaede ud fra.

Da Forholdet mellem $F(x, y, \theta)$ og $F_\theta'(x, y, \theta)$ ikke kan være uafhængigt af θ, kan det heller ikke være identisk lig en Konstant, og altsaa maa:

$$\frac{F(x, y, \theta)}{F_\theta'(x, y, \theta)} = \text{Konstant}$$

være det fuldtændige Integral af den forelagte Ligning. Alle andre Integrationsfaktorer kunne udledes af de to ovenfor nævnte, og man maa f. Ex. have:

$$F_\theta''(x, y, \theta) = F_\theta'(x, y, \theta)\, \psi\left(\frac{F_\theta'(x, y, \theta)}{F(x, y, \theta)}\right),$$

hvor ψ er en ubekjendt Funktion. Men da

$$\frac{F_\theta'(x, y, \theta)}{F(x, y, \theta)} \quad \text{og} \quad \frac{F_\theta''(x, y, \theta)}{F_\theta'(x, y, \theta)}$$

begge indeholde θ, og begge ere algebraiske Funktioner af θ, saa maa ψ være et algebraisk Funktionstegn, da Ligningen ellers er urimelig.

Altsaa maa det være tilladt at erstatte θ ved et vilkaarligt Bogstav i. Man faar da:

$$\frac{d^2 F}{d i^2} = \frac{dF}{di}\, \psi\left(\frac{\frac{dF}{di}}{F}\right) \tag{11}$$

Ved her at sætte

$$\frac{dF}{di} = p,$$

faar man

$$\frac{dp}{dF} = \psi\left(\frac{p}{F}\right).$$

Her sættes

$$\frac{p}{F} = z,$$

hvorved erholdes:

$$\frac{dz}{\psi - z} = \frac{dF}{F}.$$

Man faar ved Integration:

$$C_1 F = \psi_0(z), = \psi_0\left(\frac{C_1 p}{C_1 F}\right),$$

idet

$$\psi_0(z) = e^{\int \frac{az}{\psi - z}},$$

og C_1 er en af i uafhængig Størrelse.

Opløses denne Ligning m. H. t. $C_1 p$, erholder man en Ligning af Formen:

$$C_1 \frac{dF}{di} = \psi_1 (C_1 F), \tag{12}$$

hvor ψ_1 er en ny algebraisk Funktion. Denne Ligning er en af de fuldstændige Differentialligninger af første Orden, som tilfredsstiller (11); men da det kunde tænkes, at der til (11) ogsaa kunde svare en anden Differentialligning af første Orden, der tilfredsstillede den som en partikulær Opløsning, saa differentierer man (12) m. H. t. C_1, hvilket giver

$$\frac{dF}{di} = F \psi_1' (C_1 F).$$

Kombination af denne Ligning med (12) giver

$$C_1 F \psi_1' (C_1 F) = \psi_1 (C_1 F),$$

hvoraf man udleder

$$C_1 F = \alpha,$$

hvor α er en Konstant. Altsaa er den søgte partikulære Opløsning

$$\alpha \frac{dF}{di} = F \psi_1 (\alpha).$$

Men da

$$\frac{F_\theta' (x, y, \theta)}{F' (x, y, \theta)}$$

ikke kan være uafhængig af θ, maa denne Opløsning forkastes.

Det fuldstændige Integral af (12) er af Formen

$$C_1 F = \chi (i + C_2), \tag{13}$$

hvor C_2 er en ny af i uafhængig Størrelse.

Vil man have den partikulære Opløsning til (12), maa man eliminere C_2 mellem (13) og

$$\chi' (i + C_2) = 0.$$

Men da man derved kommer til en Form for $F (x, y, \theta)$, som er uafhængig af θ, saa har denne Opløsning ingen Betydning i nærværende Sammenhæng. Med en lille Forandring i Betegnelsen kan (13) skrives

$$F = C_1 \chi (i + C_2),$$

saa at man har:

$$F (x, y, \theta) = C_1 \chi (\theta + C_2),$$

hvilken Formel bestemmer den Maade, hvorpaa θ indgaar i $F (x, y, \theta)$. χ maa være et algebraisk Funktionstegn. — Indsættes nu dette Resultat i Faktorens Bestemmelsesligning (2), saa finder man:

$$\left.\begin{array}{l} C_1\,\chi'\,(\theta + C_2)\left[M\dfrac{d\,(\theta + C_2)}{dy} - N\dfrac{d\,(\theta + C_2)}{dx}\right] \\ + \chi\,(\theta + C_2)\left[M\dfrac{d\,C_1}{dy} - N\dfrac{d\,C_1}{dx} + C_1\left(\dfrac{dM}{dy} - \dfrac{dN}{dx}\right)\right] \end{array}\right\} = 0.$$

Men nu kan

$$\frac{\chi'\,(\theta + C_2)}{\chi\,(\theta + C_2)}$$

ikke være uafhængig af θ, og den ovenstaaende Ligning kan da alene bestaa, dersom Koefficienterne til χ' og χ blive Nul hver for sig. Altsaa maatte man have:

$$M\frac{d\,C_1}{dy} - N\frac{d\,C_1}{dx} + C_1\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = 0,$$

saa at C_1, der indeholder mindst én Transcendent af n^{te} Orden færre end F, maatte være Integrationsfaktor.

Som Resultat af disse Undersøgelser ses det da, *at den simpleste Integrationsfaktor aldrig kan indeholde en Logarithme blandt Transcendenterne af højest Orden.*

4.

Det skal derefter undersøges, hvorvidt Integrationsfaktorens Bestemmelsesligning kan tilfredsstilles, dersom man for φ indsætter

$$\varphi = F\,(x, y, \theta),$$

hvor nu

$$\theta = e^v$$

er en Exponentialfunktion af n^{te} Orden. F indeholder algebraisk andre monome Exponentialfunktioner af n^{te} Orden, Transcendenter af lavere Ordner og endelig algebraiske Funktioner af x og y.

Vi sætte som før:

$$\frac{d\varphi}{dy} = F_1\,(x, y, \theta), \quad \frac{d\varphi}{dx} = F_2\,(x, y, \theta).$$

Man har da:

$$M F_1\,(x, y, \theta) - N F_2\,(x, y, \theta) + F\,(x, y, \theta)\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = 0.$$

Denne Ligning skal være identisk m. H. t. θ, og man kan derfor erstatte θ ved $\mu\theta$, hvor μ er en arbitrær Konstant. Derved erholder man:

$$M F_1(x, y, \mu\theta) - N F_2(x, y, \mu\theta) + F(x, y, \mu\theta)\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = 0. \tag{14}$$

Men den samme Ligning vilde være udkommet, hvis man fra Begyndelsen af havde sat

$$\varphi = F(x, y, \mu\theta),$$

saa at denne Funktion er en Integrationsfaktor, hvis $F(x, y, \theta)$ er det. Ved at differentiere Ligningen (14) m. H. t. μ og derefter sætte $\mu = 1$, finder man desuden følgende nye Faktorer:

$$\varphi_1 = \theta F_\theta'(x, y, \theta),$$
$$\varphi_2 = \theta^2 F_\theta''(x, y, \theta).$$

Lad os antage, at Forholdet mellem φ og φ_1 var uafhængigt af θ og lig A, saa at man havde

$$\theta F_\theta'(x, y, \theta) = A F(x, y, \theta).$$

Det maatte da her være tilladt at erstatte θ ved et vilkaarligt Bogstav i, hvorefter Integration af Ligningen

$$i\frac{dF}{di} = AF \tag{15}$$

giver

$$F = \alpha i^A,$$

saa at:

$$F(x, y, \theta) = \alpha\theta^A. \tag{16}$$

I denne Ligning er α en af θ uafhængig Størrelse; men da venstre Side er en algebraisk Funktion af θ, maa højre Side være det samme, og dette finder kun Sted, hvis A er en rational Konstant. Men dersom A er en saadan Størrelse, er der foreløbig intet urimeligt i at antage Existensen af Faktorer af den ved (15) bestemte Form.

Dersom Forholdet mellem φ_2 og φ_1 var uafhængigt af θ og lig med B, vilde man paa lignende Maade let finde, at Funktionen F maatte have Formen:

$$F(x, y, \theta) = \alpha + \beta\theta^{B+1}, \tag{17}$$

hvor α og β ere uafhængige θ. Skal denne Ligning ikke indeholde en Urimelighed, maa B være en rational Konstant. Har man tillige $\alpha = 0$, vil (17) falde sammen med (16). Dersom α er forskjellig fra Nul, finder man ved at indsætte den fundne Værdi for $F(x, y, \theta$ i Faktorens Bestemmelsesligning:

$$M\left[\frac{d\alpha}{dy} + \theta^{B+1}\left(\beta(B+1)\frac{dv}{dy} + \frac{d\beta}{dy}\right)\right] - N\left[\frac{d\alpha}{dx} + \theta^{B+1}\left(\beta(B+1)\frac{dv}{dx} + \frac{d\beta}{dx}\right)\right]$$
$$+ (\alpha + \beta\theta^{B+1})\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = 0.$$

Men for at denne Ligning kan være identisk, maa man have

$$M \frac{d\alpha}{dy} - N \frac{d\alpha}{dx} + \alpha \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = 0,$$

saa at Funktionen α, som er simplere end $F(x, y, \theta)$, ogsaa maa være Integrationsfaktor. Men man kan naturligvis i dette Tilfælde ligesom i det foregaaende antage, at $F(x, y, \theta)$ er den Faktor, som indeholder det ringeste Antal af Transcendenter af n^{te} Orden, og det vil da være tilladt at abstrahere fra Formen (17).

Antages det derefter, at Forholdet mellem $F(x, y, \theta)$ og $\theta F_\theta'(x, y, \theta)$ er afhængigt af θ, saa maa

$$\frac{\theta F_\theta'(x, y, \theta)}{F(x, y, \theta)} = \text{Konstant}$$

være det fuldstændige Integral af den forelagte Ligning. Det følger heraf, at Integrationsfaktoren $\theta^2 F_\theta''(x, y, \theta)$ maa afhænge af de to andre Faktorer $\theta F_\theta'(x, y, \theta)$ og $F(x, y, \theta)$ ved en Ligning af Formen:

$$\theta^2 F_\theta''(x, y, \theta) = \theta F_\theta'(x, y, \theta)\, \psi\left(\frac{\theta F_\theta'(x, y, \theta)}{F(x, y, \theta)}\right).$$

Da nu

$$\frac{\theta^2 F_\theta''(x, y)\,\theta)}{\theta F_\theta'(x, y, \theta)} \quad \text{og} \quad \frac{\theta F_\theta'(x, y, \theta)}{F(x, y, \theta)}$$

begge indeholde θ, og begge ere algebraiske Funktioner af θ, saa maa ψ være et algebraisk Funktionstegn. Det er da tilladt at erstatte θ ved et vilkaarligt Bogtsav i, hvorved man faar:

$$i^2 \frac{d^2 F}{di^2} = i \frac{dF}{di}\, \psi\left(\frac{i \frac{dF}{di}}{F}\right). \tag{18}$$

I denne Ligning substitueres:

$$i \frac{dF}{di} = u,$$

hvorved man faar

$$\frac{du}{dF} = 1 + \psi\left(\frac{u}{F}\right).$$

Her substitueres paany

$$\frac{u}{F} = z,$$

hvorved erholdes:

$$F \frac{dz}{dF} = \psi(z) + 1 - z,$$

som ved Integration giver et Resultat af Formen:

$$C_1 F = \psi_1 \left(\frac{C_1 i \dfrac{dF}{di}}{C_1 F} \right),$$

som atter omskrives til Formen:

$$C_1 i \frac{dF}{di} = \psi_2 (C_1 F), \tag{19}$$

hvor C_1 er en af i uafhængig Størrelse.

Denne Ligning er en Differentialligning af første Orden, som tilfredsstiller (18) som et første fuldstændigt Integral. For at undersøge om der skulde gives nogen Differentialligning af 1ste Orden, der tilfredsstiller (18) som partikulær Opløsning, maa man differentiere (19) m. H. t. C_1. Derved erholder man:

$$i \frac{dF}{di} = F \psi_2' (C_1 F),$$

som kombineret med (19) giver:

$$C_1 F \psi_2' (C_1 F) = \psi_2 (C_1 F);$$

heraf udledes $C_1 F = \alpha =$ Konstant.

Indsættes dette Resultat i (19), faar man:

$$i \frac{dF}{di} = \frac{\psi_2 (\alpha)}{\alpha} F;$$

men dette Resultat maa forkastes, da man ifølge den ovenfor gjorte Antagelse her alene betragter saadanne Former af Funktionen F, som ikke gjøre Forholdet:

$$\frac{\theta F_\theta' (x, y, \theta)}{F (x, y, \theta)}$$

uafhængigt af θ. — Formlen (19) gjælder ikke, hvis ψ har en saadan Form, at:

$$\psi (z) = z - 1.$$

Men man kan abstrahere fra dette Tilfælde, da det leder til et ubrugeligt Resultat.

Integration af (19) giver et Resultat af Formen:

$$C_1 F = \chi (C_2 i),$$

hvor C_2 er uafhængig af i. Med en Forandring i Betegnelsen kan dette ogsaa skrives:

$$F = C_1 \chi (C_2 i). \tag{20}$$

Man kunde vel nu her lade C_2 variere; men dette vilde her ligesaa lidt som i det foregaaende Tilfælde lede til noget brugbart Resultat.

Ifølge (20) maa da Faktoren φ have Formen:

$$\varphi = F (x, y, \theta) = C_1 \chi (C_2 \theta),$$

hvor C_1 og C_2 ikke indeholde θ. Indsætter man dette Resultat i φ's Differentialligning, finder man:

$$\left.\begin{array}{r} M\left(C_1\,\chi'(C_2\,\theta)\left[C_2\,\theta\dfrac{dv}{dy}+\theta\dfrac{dC_2}{dy}\right]+\chi(C_2\,\theta)\dfrac{dC_1}{dy}\right) \\ -N\left(C_1\,\chi'(C_2\,\theta)\left[C_2\,\theta\dfrac{dv}{dx}+\theta\dfrac{dC_2}{dx}\right]+\chi(C_2\,\theta)\dfrac{dC_1}{dx}\right) \\ +C_1\,\chi(C_2\,\theta)\left(\dfrac{dM}{dy}-\dfrac{dN}{dx}\right) \end{array}\right\} = 0.$$

Da nu Forholdet mellem $F(x, y, \theta)$ og $\theta\,F_\theta'(x, y, \theta)$ ikke er uafhængigt af θ, maa i den nys opskrevne Ligning Koefficienterne til χ og χ' forsvinde hver for sig. Koefficienten til χ giver:

$$M\frac{dC_1}{dy} - N\frac{dC_1}{dx} + C_1\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right) = 0.$$

Men denne Ligning viser, at der maa være en simplere Faktor C_1, som gjør Differentialligningen integrabel, og da dette Resultat strider mod den fra Begyndelsen af gjorte Antagelse, saa udtrykker (16) den eneste mulige Form for Faktorer af denne Art. Der er vel her kun taget Hensyn til en enkelt af de exponentielle Transcendenter, som Funktionen F kan indeholde, men de andre maa indgaa deri paa samme Maade som θ, og hvis man derfor betegner samtlige Exponentialfunktioner ved θ_1, θ_2, ... θ_p, saa maa man have:

$$\varphi = \alpha\,\theta_1^{m_1}\,\theta_2^{m_2}\ldots\theta_p^{m_p},$$

hvor α er en Funktion, som ikke indeholder Transcendenter af n^{te} Orden, og m_1, m_2 ... m_p ere rationale Konstanter. Man kan derfor skrive:

$$\varphi = u\,e^v, \tag{21}$$

hvor u og v ere Transcendenter af Ordnen $n-1$, hvis nærmere Beskaffenhed det nu kommer an paa at undersøge. Indsætter man Udtrykket (21) for φ i (2), finder man, da e^v ikke kan være Nul:

$$M\left(u\frac{dv}{dy}+\frac{du}{dy}\right) - N\left(u\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dx}\right) + u\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right) = 0. \tag{22}$$

5.

Man sætter først i (21)

$$u = F(x, y, \theta), \qquad v = f(x, y, \theta),$$

hvor $\theta = e^{\omega}$ er en Exponentialfunktion af Ordnen $n-1$. F og f ere som sædvanlig algebraiske Funktioner af θ og andre Transcendenter af samme Orden. De kunne desuden indeholde saavel Transcendenter af lavere Ordner som algebraiske Funktioner af x og y. Ifølge (22) skal man da have:

$$\left.\begin{array}{r} M\left[F\left(\frac{df}{dy}+\theta\frac{d\omega}{dy}\frac{df}{d\theta}\right)+\frac{dF}{dy}+\theta\frac{d\omega}{dy}\cdot\frac{dF}{d\theta}\right] \\ -N\left[F\left(\frac{df}{dx}+\omega\frac{d\omega}{dx}\frac{df}{d\theta}\right)+\frac{dF}{dx}+\theta\frac{d\omega}{dx}\cdot\frac{dF}{d\theta}\right] \\ +F\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right) \end{array}\right\} = 0.$$

Men dersom denne Ligning skal være identisk, maa det være tilladt at erstatte θ ved $\mu\theta$. Multiplicerer man den saaledes fremkomne Ligning med $e^{f(x,y,\mu\theta)}$, faar man det samme Resultat, som vilde være fremkommet ved i Faktorens Bestemmelseligning (2) at sætte

$$\varphi = \varphi_1 = F(x, y, \mu\theta)\, e^{f(x, y, \mu\theta)},$$

som altsaa er en ny Integrationsfaktor, og man har som Identitet:

$$\left.\begin{array}{r} M\frac{dF(x,y,\mu\theta)\,e^{f(x,y,\mu\theta)}}{dy} - N\frac{dF(x,y,\mu\theta)\,e^{f(x,y,\mu\theta)}}{dx} \\ + F(x,y,\mu\theta)\,e^{f(x,y,\mu\theta)}\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right) \end{array}\right\} = 0.$$

Dersom man differentierer denne Ligning m. H. t. μ og derefter sætter $\mu = 1$, finder man som en tredie Faktor

$$\varphi_2 = \left(\frac{dF(x,y,\mu\theta).e^{f(x,y,\mu\theta)}}{d\mu}\right)_{\mu=1.}$$
$$= \left(\theta\frac{dF(x,y,\theta)}{d\theta} + \theta F(x,y,\theta)\frac{df(x,y,\theta)}{d\theta}\right)e^{f(x,y,\theta)}.$$

Antager man nu, at Forholdet mellem φ_1 og φ_2 er identisk lig med en Konstant C, saa kar man

$$\frac{\theta\frac{dF(x,y,\theta)}{d\theta} + \theta F(x,y,\theta)\frac{df(x,y,\theta)}{d\theta}}{F(x,y,\theta)} = C,$$

og Identiteten maa ikke forstyrres, selv om man for θ sætter et vilkaarligt Bogstav i. Efter Tilføjelse af en Faktor i Tæller og Nævner bliver da den ovenstaaende Ligning til:

$$\frac{e^{f(x,y,i)}\frac{dF(x,y,i)}{di} + F(x,y,i)\,e^{f(x,y,i)}\frac{df(x,y,i)}{di}}{F(x,y,i)\,e^{f(x,y,i)}} = \frac{C}{i}.$$

Integration af denne Ligning giver:

$$F(x, y, i)\, e^{f(x,y,i)} = C' e^{Cli},$$

hvor C' ikke indeholder i. Erstatter man nu i ved $\theta = e^{\omega}$, finder man:

$$F(x, y, \theta)\, e^{f(x,y,\theta)} = C' e^{C\omega},$$

som er urimelig, da den ene Side indeholder θ og den anden ikke. — Naar nu Forholdet $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ ikke kan være identisk lig en Konstant, saa maa

$$\frac{\theta \frac{dF(x,y,\theta)}{d\theta} + \theta F(x,y,\theta) \frac{df(x,y,\theta)}{d\theta}}{F(x,y,\theta)} = C$$

være det fuldstændige Integral af den forelagte Differentialligning. Men dersom man af dette Integral ved Differentiation skal kunne frembringe Ligningen

$$M + N\frac{dy}{dx} = 0,$$

saa seer man let, at denne Ligning tværtimod den ovenfor gjorte Antagelse maa have en Faktor, som er transcendent af lavere Orden end φ. Man kan da slutte, at F og f ikke kunne indeholde nogen Exponentialfunktion af Ordnen $n-1$.

Det skal derefter undersøges, om man da kan have i (21)

$$u = F(x, y, \theta), \qquad v = f(x, y, \theta),$$

hvor nu

$$\theta = l.\omega$$

er en monom logarithmisk Transcendent af Ordnen $n-1$. Insættelse i (22) giver:

$$M\left[F(x,y,\theta)\left(\frac{df(x,y,\theta)}{dy} + \frac{1}{\omega}\cdot\frac{d\omega}{dy}\cdot\frac{df(x,y,\theta)}{d\theta}\right) + \frac{dF(x,y,\theta)}{dy} + \frac{1}{\omega}\cdot\frac{d\omega}{dy}\cdot\frac{dF(x,y,\theta)}{d\theta}\right]$$
$$- N\left[F(x,y,\theta)\left(\frac{df(x,y,\theta)}{dx} + \frac{1}{\omega}\cdot\frac{d\omega}{dx}\cdot\frac{df(x,y,\theta)}{d\theta}\right) + \frac{dF(x,y,\theta)}{dx} + \frac{1}{\omega}\cdot\frac{d\omega}{dx}\cdot\frac{dF(x,y,\theta)}{d\theta}\right]$$
$$+ F(x,y,\theta)\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = 0.$$

Skal denne Ligning være identisk m. H. t. θ, maa det være tilladt at erstatte θ ved $\theta + \mu$, og dersom man multiplicerer den saaledes fremkomne Ligning med $e^{f(x,y,\theta+\mu)}$, faar man det samme Resultat, som vilde være fremkommet ved i (2) at sætte:

$$\varphi = \varphi_1 = F(x, y, \theta + \mu)\, e^{f(x,y,\theta+\mu)},$$

som altsaa er en ny Integrationsfaktor, og man har som Identitet

$$\left.\begin{array}{l} M\dfrac{dF(x,y,\theta+\mu)\,e^{f(x,y,\theta+\mu)}}{dy}-N\dfrac{dF(x,y,\theta+\mu)\,e^{f(x,y,\theta+\mu)}}{dx} \\ \qquad +F(x,y,\theta+\mu)\,e^{f(x,y,\theta+\mu)}\left(\dfrac{dM}{dy}-\dfrac{dN}{dx}\right) \end{array}\right\}=0.$$

Dersom man differentierer denne Ligning m. H. t. μ og derefter sætter $\mu = 0$, finder man som en ny Integrationsfaktor

$$\varphi_2 = \left(\frac{dF(x,y,\theta+\mu)\,e^{f(x,y,\theta+\mu)}}{d\mu}\right)_{\mu=0} = e^{f(x,y,\theta)}\frac{dF(x,y,\theta)}{d\theta}$$
$$+F(x,y,\theta)\,e^{f(x,y,\theta)}\frac{df(x,y,\theta)}{d\theta}.$$

Det antages nu, at Forholdet mellem φ_1 og φ_2 er identisk lig en Konstant C, og man maa da have som før:

$$\frac{e^{f(x,y,i)}\dfrac{dF(x,y,i)}{di}+F(x,y,i)\,e^{f(x,y,i)}\dfrac{df(x,y,i)}{di}}{F(x,y,i)\,e^{f(x,y,i)}}=C,$$

hvor i er et for θ indført vilkaarligt Bogstav. Integration af denne Ligning giver:

$$F(x,y,i)\,e^{f(x,y,i)} = e^{Ci+C'},$$

hvor C' er en af i uafhængig Størrelse. Som en mulig Form for Faktorer af den her betragtede Slags har man da:

$$\varphi = e^{C_1 lu_1 + C_2 lu_2 + \ldots\ldots C_m lu_m + v},$$

hvor $C_1, C_2 \ldots C_m$ ere konstante Størrelser, $u_1, u_2, \ldots u_m, v$ Transcendenter af Ordnen $n-2$. Hvis Forholdet mellem φ_2 og φ_1 ikke er identisk lig med en Konstant, kommer man i Strid med den gjorte Forudsætning, at den betragtede Faktor er den simpleste.

Det kan nu vises, at v og alle u'erne ere algebraiske Funktioner.

Vi sætte:

$$\varphi = e^{\Sigma Clu+v}$$

og antage, at u og v kunne indeholde en Logarithme θ af Ordnen $n-2$. Man sætter:

$$u = F(x,y,\theta), \qquad v = f(x,y,\theta).$$

Man har da foruden Faktoren

$$\varphi = e^{\Sigma Cl.F(x,y,\theta)+f(x,y,\theta)}$$

ogsaa

$$\varphi_1 = \frac{d\varphi}{d\theta} = \varphi\left[\Sigma C\frac{\dfrac{dF(x,y,\theta)}{d\theta}}{F(x,y,\theta)}+\frac{df(x,y,\theta)}{d\theta}\right].$$

Hvis nu Forholdet mellem φ_1 og φ ikke er konstant, maa der være simplere Faktorer. Hvis dette Forhold er konstant, finder man:

$$\Sigma\, C\, l\, F(x, y, \theta) + f(x, y, \theta) = C'\theta + C'',$$

hvor C' er konstant og C'' uafhængig af θ. Men denne Ligning er urimelig, og Funktionerne u og v kunne altsaa ingen Logarithme indeholde.

Dersom Funktionerne u og v indeholdt en Exponentialfunktion θ, fik man som Faktorer:

$$\varphi = e^{\Sigma\, C l F(x, y, \theta) + f(x,y,\theta)}$$

og

$$\varphi_1 = \frac{d\varphi}{d\theta} = \varphi\left[\Sigma\, C\, \frac{\theta \dfrac{dF(x,y,\theta)}{d\theta}}{F(x,y,\theta)} + \theta\,\frac{df(x,y,\theta)}{d\theta}\right].$$

Var nu Forholdet mellem φ og φ_1 konstant, fik man:

$$\Sigma\, C l F(x,y,\theta) + f(x, y, \theta) = C' l\theta + C'',$$

hvor C' er konstant og C'' uafhængig af θ. Men denne Ligning er urimelig, fordi θ er en Exponentialfunktion, og højre Side altsaa er uafhængig af θ. Dersom Forholdet mellem φ og φ_1 ikke var konstant, maatte der være simplere Faktorer, og da u_1, u_2 ... u_m, v saaledes hverken kunne indeholde Logarithmer eller Exponentialfunktioner, maa de nævnte Størrelser være algebraiske Funktioner af x og y. —

Af Hensyn til en senere Anvendelse bemærkes det her, at der i hele den Del af den foregaaende Udvikling, som angaar Undersøgelse af transcendente Integrationsfaktorer, ikke har været gjort Brug af den Omstændighed, at M og N ere rationale Funktioner af x og y. Den hele Bevisførelse vilde vedblive at gjælde, selv om M og N blot forudsattes algebraiske.

Med Hensyn til Funktionerne v, u_1, u_2, ... u_m kan det endelig til Slutning bevises, at naar M og N ere rationale, saa kan det samme forudsættes om v, u_1, u_2 ... u_m.*)

Man forestille sig en algebraisk Funktion θ af x og y af den Beskaffenhed, at man kan udtrykke v, u_1, ... u_m rationalt ved θ, x og y. En saadan Funktion er f. Ex. Summen af alle Størrelserne v, u_1, u_2 ... u_m multiplicerede hver især med sin ubestemte, konstante Størrelse. Lad

$$\Theta = 0$$

være den algebraiske Ligning, ved hvilken θ bestemmes.

---

*) Bevisformen skyldes Abel: Oeuvres compl. Tome I, p. 351.

Den antages irreduktibel af Graden δ. Indsættes

$$\varphi = e^{\Sigma C l u + v}$$

i Faktorens Bestemmelsesligning, finder man:

$$M \Sigma C \frac{1}{u} \frac{du}{dy} - N \Sigma C \frac{1}{u} \frac{du}{dx} + M \frac{dv}{dy} - N \frac{dv}{dx} + \frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} = 0. \tag{22}$$

Venstre Side kan her gjøres til en algebraisk rational Funktion af θ, x og y, og Ligningen maa blive identisk ved Indsættelse af Udtrykket for θ ved x og y. Men da $\Theta = 0$ er forudsat irreduktibel, ville alle dens Rødder tilfredsstille den ovenstaaende Ligning, hvis blot én gjør det. Rødderne i $\Theta = 0$ betegnes ved:

$$\theta_1, \theta_2, \ldots\ldots \theta_\delta.$$

De tilsvarende Udtryk for v, u_1, u_2, ... u_m betegnes ved:

$$v', u_1', u_2' \ldots\ldots u_m',$$
$$v'', u_1'', u_2'' \ldots\ldots u_m'',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$v^{(\delta)}, u_1^{(\delta)}, u_2^{(\delta)} \ldots\ldots u_m^{(\delta)}.$$

Disse Systemer af Værdier, δ i Antal, af v, u_1 ... u_m indsættes efterhaanden i (22); Resultaterne adderes, hvorefter man dividerer med δ. Man vil da finde:

$$M \Sigma \frac{C}{\delta} \frac{dl u' u'' \ldots u^{(\delta)}}{dy} - N \Sigma \frac{C}{\delta} \frac{dl u' u'' \ldots u^{(\delta)}}{dx}$$
$$+ M \frac{d \frac{v' + v'' + \ldots v^{(\delta)}}{\delta}}{dy} - N \frac{d \frac{v' + v'' + \ldots v^{(\delta)}}{\delta}}{dx} + \frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} = 0.$$

Multiplicerer man her med

$$e^{\Sigma \frac{C}{\delta} l u' u'' \ldots u^{(\delta)} + \frac{v' + v'' + \ldots v^{(\delta)}}{\delta}},$$

saa har man netop, hvad der vilde være udkommet ved i Faktorens Bestemmelsesligning at substituere det nys angivne Udtryk for φ.

Men her er

$$u' u'' u''' \ldots u^{(\delta)}$$

en rationel Funktion af x, y, θ_1, ... θ_δ, og m. H. t. de sidstnævnte Størrelser er den tillige symmetrisk, og den kan da ved Hjælp af Ligningen $\Theta = 0$ udtrykkes som en rational Funktion af x og y. Paa lignende Maade ser man, at

$$\frac{v' + v'' + \ldots\ldots v^{(\delta)}}{\delta}$$

er en rational Funktion af x og y. Med en lille Forandring i Betegnelsen har man altsaa

$$\varphi = e^{\Sigma C l . U + V},$$

hvor U og V ere rationale Funktioner af x og y som den simpleste Form for en Integrationsfaktor til en Ligning af Formen

$$M + N\frac{dy}{dx} = 0,$$

hvor M og N ere rationale Funktioner af x og y, under Forudsætning af, at der overhovedet gives en Faktor, som kan udtrykkes ved bekjendte Funktioner, og at denne Faktor ikke er en algebraisk Funktion af x og y.

Da man i det foregaaende har fundet

$$\varphi = \sqrt[r]{k},$$

hvor k er en rational Funktion af x og y og r et rationalt Tal, som den simpleste Form for algebraiske Faktorer, hvis saadanne existere, og da kan man skrive:

$$\sqrt[r]{k} = e^{\frac{1}{r} lk},$$

saa seer man, at den algebraiske Funktionsform er indbefattet som et specielt Tilfælde under den transcendente, og Resultatet af Undersøgelsen kan nu sammenfattes i følgende

Theorem.

Dersom Differentialligningen

$$M + N\frac{dy}{dx} = 0,$$

hvor M og N ere rationale Funktioner af x og y, har Integrationsfaktorer, som kunne udtrykkes ved bekjendte Fnnktioner af x og y, saa maa der blandt disse være én af Formen

$$\varphi = e^{C_1 l U_1 + C_2 l U_2 + \ldots C_m l U_m + V},$$

hvor U_1, U_2, ... U_m, V ere rationale Funktioner af x og y.

Dersom man nu vilde anvende de ubekjendte Koefficienters Methode til at bestemme Faktoren, kunde man sætte:

$$C_1 \, l U_1 + C_2 \, l . U_2 + \ldots\ldots C_m \, l . U_m + V = \psi,$$

og ψ skulde da tilfredsstille Differentialligningen:

$$M\frac{d\psi}{dy} - N\frac{d\psi}{dx} + \frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} = 0.$$

Her maa man bemærke, at $\frac{d\psi}{dx}$ og $\frac{d\psi}{dy}$ ere rationale Funktioner af x og y, og man kunde altsaa for disse to Differentialkoefficienter indsætte to rationale Funktioner af x og y med ubekjendte Koefficienter. Man kunde altid forudsætte, at de havde den samme Nævner; men de maatte foruden den ovenstaaende Ligning endnu tilfredsstille

$$\frac{d\frac{d\psi}{dx}}{dy} = \frac{d\frac{d\psi}{dy}}{dx}.$$

Naar $\frac{d\psi}{dx}$ og $\frac{d\psi}{dy}$ ere fundne, kan man finde ψ ved Integration. Men de med Koefficienternes Bestemmelse forbundne Regninger ere, selv hvor Talen er om meget simple Differentialligninger, saa sammensatte, at Methoden maa betragtes som ubrugelig.

I de Tilfælde, hvor man kjender partikulære Integraler i den forelagte Differentialligning, lykkes det undertiden ved at slaa ind paa en ganske anden Vej at naa til en Bestemmelse af Faktoren. Dette er allerede tidligere udførligt paavist. (C. Tychsen: Om Integration af Differentialligningen $P\frac{dy}{dx} + Q = 0$, hvor P og Q ere bekjendte Funktioner af x og y. Tidsskr. for Math. 1866).

6.

Har man til Integration forelagt Ligningen

$$\frac{dy}{dx} = P, \tag{23}$$

hvor P er en algebraisk Funktion af x og y, saa bestemmes Integrationsfaktoren φ ved Ligningen

$$P\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dx} + \varphi\frac{dP}{dy} = 0. \tag{24}$$

Naar man nu vil undersøge, hvorvidt Differentialligningen (24) har partikulære Integraler, som ere algebraiske Funktioner af x og y, vil det være bekvemmest at tænke sig φ udtrykt ikke som Funktion af x og y alene, men som Funktion af x, y og $\frac{dy}{dx} = p$. Ifølge (23) maa $\frac{dy}{dx}$ eller p være Rod i en irreduktibel algebraisk Ligning, hvis Koefficienter ere rationale Funktioner af x og y. Vi betegne denne Ligning ved:

$$U = p^n + P_1 p^{n-1} + P_2 p^{n-2} \ldots\ldots P_{n-1} p + P_n = 0. \tag{25}$$

Da φ betragtes som Funktion af x, y og p, maa man i (24) indsætte:

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dp}\cdot\frac{dp}{dx} \text{ istedetfor } \frac{d\varphi}{dx},$$

$$\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dp}\cdot\frac{dp}{dy} \text{ istedetfor } \frac{d\varphi}{dy},$$

$$p \text{ istedetfor } P.$$

dx og $\frac{dp}{dy}$ bestemmes ifølge (25) ved Ligningerne

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dp}\cdot\frac{dp}{dx} = 0,$$

$$\frac{dU}{dy} + \frac{dU}{dp}\cdot\frac{dp}{dy} = 0.$$

Derved bliver Faktorens Bestemmelsesligning til

$$-\frac{dU}{dp}\cdot\frac{d\varphi}{dx} - p\frac{dU}{dp}\cdot\frac{d\varphi}{dy} + \left(p\frac{dU}{dy} + \frac{dU}{dx}\right)\frac{d\varphi}{dp} + \varphi\frac{dU}{dy} = 0. \tag{26}$$

Problemet er altsaa at finde den simpleste Form af en algebraisk Funktion af x, y, p, som tilfredsstiller den ovenstaaende Ligning, idet p er en algebraisk Funktion af x og y, som tilfredsstiller (25).

Har nu Ligningen (26) et partikulært Integral, som er en algebraisk Funktion af x, y, p, saa maa det dertil svarende φ være en Rod i en irreduktibel algebraisk Ligning

$$f(x, y, p, \varphi) = 0. \tag{27}$$

Ifølge denne Ligning kunne $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dp}$ udtrykkes rationalt ved x, y, p, φ, og dersom man indsætter de erholdte Udtryk i (26), bliver denne Ligning til en algebraisk Ligning i φ med Koefficienter, som ere rationale Funktioner af x, y, p. Man slutter deraf, at hvis én af Rødderne i (27) kan bruges som Integrationsfaktor, saa kunne de alle bruges. Indsætter man i (26) en vilkaarlig af disse Rødder φ_r, og multiplicerer man derefter Ligningen med: $\mu\varphi_r^{\mu-1}$, finder man:

$$-\frac{dU}{dp}\cdot\frac{d\varphi_r^{\mu}}{dx} - p\frac{dU}{dp}\cdot\frac{d\varphi_r^{\mu}}{dy} + \left(p\frac{dU}{dy} + \frac{dU}{dx}\right)\frac{d\varphi_r^{\mu}}{dp} + \mu\varphi_r^{\mu}\frac{dU}{dy} = 0.$$

Betegner man nu med S_μ Summen af de μte Potenser af Rødderne i (27), saa har man ogsaa:

$$-\frac{dU}{dp}\cdot\frac{dS_\mu}{dx} - p\cdot\frac{dU}{dp}\cdot\frac{dS_\mu}{dy} + \left(p\frac{dU}{dy} + \frac{dU}{dx}\right)\frac{dS_\mu}{dp} + \mu S_\mu\frac{dU}{dy} = 0.$$

Altsaa tilfredsstille S_μ og φ_r^{μ} den samme Differentialligning. S_μ er ifølge (27) en rational Funktion af x, y, p, og dersom Ligningen (27) overhovedet existerer, saa maa der altid være mindst én Værdi af S_μ, som er forskjellig fra Nul, idet man lader μ gjennemløbe de positive hele Tal fra 1 indtil det, som angiver Graden af (27). Kan man altsaa finde en Værdi af μ og en tilsvarende af S_μ, som tilfredsstille den ovenstaaende Differentialligning, saa kan man som Integrationsfaktor bruge:

$$\varphi = \sqrt[\mu]{S_\mu}.$$

Da Værdien af S_μ er en rational Funktion af x, y, p, kan man sætte

$$S_\mu = \frac{\theta(x,y,p)}{\psi(x,y,p)},$$

hvor θ og ψ ere hele Funktioner; det skal nu vises, at Udtrykket for S_μ altid kan omformes saaledes, at det ikke indeholder p i Nævneren. p er én af Rødderne i (25), de andre Rødder betegnes ved p_1, p_2, ... p_{n-1}. Multiplicerer man nu Tæller og Nævner i Udtrykket for S_μ med:

$$\psi(x,y,p_1)\,\psi(x,y,p_2)\,.....\,\psi(x,y,p_{n-1}),$$

saa bliver Nævneren en symmetrisk Funktion af p, p_1, ... p_{n-1}, og den kan følgelig udtrykkes ved en rational Funktion af x og y. Tælleren bliver til en rational Funktion af x, y, p, p_1 ... p_{n-1}, som er symmetrisk m. H. t. p_1, p_2, ... p_{n-1}. En saadan Funktion kan udtrykkes rationalt ved:

$$p_1 + p_2 + \ldots p_{n-1},$$
$$p_1^2 + p_2^2 + \ldots p_{n-1}^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_1^n + p^n + \ldots p_{n-1}^n.$$

Men betegner man:

$$p^r + p_1^r + p_2^r \ldots p_{n-1}^r$$

ved s_r, saa ere de nævnte Funktioner

$$s_1 - p,\; s_2 - p^2,\; s_3 - p^3 \;\ldots\; s_n - p^n,$$

og følgelig ere de hele Funktioner af p.

Paa Grund af Ligningen (25) kan altsaa S_μ fremstilles under Formen:

$$S_\mu = \alpha + \beta p + \gamma p^2 + \ldots\ldots\ldots$$

Om dette Udtryk er det endvidere tilladt at forudsætte, at det ikke indeholder p i Potenser højere en den $(n-1)^{te}$; thi alle andre kunne bortskaffes ved Ligningen (25). Altsaa kan man skrive:

$$S_\mu = \alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + \ldots \alpha_{n-1} p^{n-1},$$

hvor α_0, α_1, ... α_{n-1} ere rationale Funktioner af x og y. Dersom man indsætter dette Udtryk i (26) og atter bortskaffer alle Potenser af p højere end den $(n-1)^{te}$, faar man en Ligning af Formen:

$$A_0 + A_1 p + A_2 p^2 + \ldots\ldots A_{n-1} p^{n-1} = 0, \tag{28}$$

hvor A_0, A_1, A_2, ... A_{n-1} ere at betragte som rationale Funktioner af x og y, idet de indeholde x, y, α_0, ... α_{n-1} og Differentialkoefficienter af disse Størrelser m. H. t. x og y. Men en Ligning som (28) kan, da (25) er irreduktibel, ikke existere med mindre den er identisk, og altsaa faar man til Bestemmelse af α_0 ... α_{n-1} de n Ligninger:

$$A_0 = 0,\; A_1 = 0,\; \ldots\; A_{n-1} = 0.$$

7.

Desom Differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = P$$

ikke kan integreres ved en algebraisk Faktor, bliver der Spørgsmaal om, hvorvidt den da kan integreres ved en Faktor, som indeholder transcendente Funktioner af de Variable. Ifølge det Foregaaende, maa, da P er en algebraisk Funktion af x og y, den simpleste Form for en saadan Faktor være:

$$\varphi = e^{c_1 lu_1 + c_2 lu_2 + \ldots c_m lu_m + v} = e^{\Sigma clu + v},$$

hvor $u_1, u_2, \ldots u_m, v$ ere algebraiske Funktioner af de Variable, $c_1, c_2, \ldots c_m$ ere Konstanter.

Men da p ogsaa er en algebraisk Funktion af x og y, vil det være tilladt at betragte $u_1, \ldots u_m, v$ som algebraiske Funktioner af x, y, p, og det kan vises, at de paa denne Maade kunne skrives under rational Form. —

Man tænker sig da en algebraisk Funktion θ af x, y og p af den Beskaffenhed, at man kan udtrykke $v, u_1, \ldots u_m$ rationalt ved θ, x, y, p.

$$\Theta = 0$$

er den Ligning, ved hvilken θ bestemmes. Den antages irreduktibel. Indsættes

$$\varphi = e^{\Sigma clu + v}$$

i Faktorens Bestemmelsesligning (26)

$$-\frac{dU}{dp}\cdot\frac{d\varphi}{dx} - p\frac{dU}{dp}\frac{d\varphi}{dy} + \left(p\frac{dU}{dy} + \frac{dU}{dx}\right)\frac{d\varphi}{dp} + \varphi\frac{dU}{dy} = 0,$$

faar man efter Division med φ:

$$-\frac{dU}{dp}\left[\Sigma\frac{c}{u}\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}\right] - p\frac{dU}{dp}\left[\Sigma\frac{c}{u}\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dy}\right] + \left(p\frac{dU}{dy} + \frac{dU}{dx}\right)\left[\Sigma\frac{c}{u}\frac{du}{dp} + \frac{dv}{dp}\right] + \frac{dU}{dy} = 0.$$

Her kan venstre Side gjøres til en rational Funktion af θ, x, y, p, og Ligningen maa da blive identisk ved Indsættelse af Udtrykket for θ ved x, y, p. Fra dette Punkt kan Beviset føres videre ganske paa samme Maade som i § 5, og man kommer til Slutning til følgende

Theorem.

Dersom Differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = P,$$

hvor P er en algebraisk Funktion af x og y, har Integrationsfaktorer, som kunne udtrykkes ved bekjendte Funktioner af x og y, saa maa der blandt disse være én af Formen

$$\varphi = e^{C_1 lU_1 + C_2 lU_2 + \ldots C_m lU_m + V},$$

hvor $U_1, U_2, \ldots U_m, V$ ere rationale Funktioner af x, y og P, og $C_1, C_2, \ldots C_m$ ere Konstanter.